Chapitre 22 : Matrices et applications linéaires

Table des matières

Notation : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices de familles de vecteurs et d'applications linéaires

1.1 Matrices d'une famille de vecteurs

Définition 1.1 (matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On considère une famille finie $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E, avec $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ dans la base $\mathscr{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur v_j dans la base $\mathscr{B}$.
Autrement dit, il s'agit de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p) = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tels que pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 1.2 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X^3 + 2, X^2 + X, 5X^2)$.

Cas particulier (matrice d'un vecteur) : La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ d'un vecteur $v \in E$ dans la base $\mathscr{B}$ est le vecteur colonne constitué des coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.

1.2 Matrices d'une application linéaire

Définition 1.3 (matrice d'une application linéaire dans des bases)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une base de F.
On considère une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, la matrice de la famille $f(\mathscr{B}) \underset{\mathrm{def}}{=} (f(e_1), \cdots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B})) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Autrement dit, il s'agit de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tels que pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & .. & f(e_j) & .. & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 1.4 : Soit f l'application linéaire suivante $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$.
Exprimer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

Cas particulier des endomorphismes :
Pour la matrice d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on prend souvent $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.
On note alors plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, appelée matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 1.5 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et soit h_λ l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h_\lambda)$. *Rappel :* $h_\lambda = \lambda \mathrm{id}_E$.

Proposition 1.6 (matrices de projections et de symétries)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition $F \oplus G$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix} \text{ où } r = \dim(F).$$

1.3 Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition 1.7 (coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F. On considère une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et un vecteur v de E.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v).$$

Remarque : Plus généralement, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_p)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_p)$ où $v_1, \dots, v_p \in E$.

Exemple 1.8 : Soit f l'application linéaire suivante $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$
Déterminer les coordonnées du vecteur $f((X+1)^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

1.4 Lien entre applications linéaires et matrices

Théorème 1.9 (isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
L'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \end{array}$$

Cas particulier des endomorphismes : On a alors un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

Théorème 1.10 (matrice d'une composée d'applications linéaires)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G, et soient des applications linéaires $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f).$$

Cas particulier des endomorphismes : Soient f et $g \in \mathscr{L}(E)$. On a la relation :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g).$$

Corollaire 1.11 (lien entre l'inverse d'une matrice et la réciproque d'un isomorphisme)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F, et soit une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
L'application f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est une matrice carrée inversible, et dans ce cas, on a la relation :

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}).$$

Exemple 1.12 : Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \mapsto & (a+c) + (2b+c)X + (a+b)X^2 \end{array} \right.$ est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

Cas particulier des endomorphismes : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si la matrice carrée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible.
Dans ce cas, on a la relation :

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}).$$

1.5 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 1.13 (application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Notons $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
L'unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f) = A$ est appelée <u>application linéaire canoniquement associée à la matrice A</u>.
On la note f_A.

Remarque : L'existence et l'unicité découlent de l'isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f)$ entre $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vu dans le théorème 1.9.

Exemple 1.14 : Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarques :

1. L'application linéaire canoniquement associée à la matrice nulle $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'application nulle $0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)}$.
2. L'application linéaire canoniquement associée à $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'application identité $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$.
3. Si A est une matrice ligne, i.e. si $A \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, alors l'application linéaire canoniquement associée à A est une forme linéaire.
4. L'application f_A est un automorphisme si et seulement si A est une matrice carré inversible.

Proposition 1.15 (retour sur la condition suffisante d'inversibilité via l'inversibilité à gauche/droite)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ (A est inversible à droite) ou $BA = I_n$ (A est inversible à gauche).
Alors la matrice A est inversible, et $B = A^{-1}$.

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Définition et premiers exemples

Définition 2.1 (noyau, image et rang d'une matrice)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le <u>noyau de A</u>, noté $\mathrm{Ker}(A)$, est le noyau de l'application linéaire $X \mapsto AX$ i.e.

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$$

  Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- L'<u>image de A</u>, notée $\mathrm{Im}(A)$, est l'image de l'application linéaire $X \mapsto AX$ i.e.

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}$$

  Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Le <u>rang de A</u>, noté $\mathrm{rg}(A)$ est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$, i.e. $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Remarque : En notant $f_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A, on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{Ker}(f_A) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A) \iff (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Im}(f_A)$$

On passe des vecteurs de $\mathbb{K}^p$ ou $\mathbb{K}^n$ aux matrices colonnes et réciproquement.

Proposition 2.2 (description du noyau et de l'image d'une matrice)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
  Dans un tel système, chaque équation correspond à une ligne de la matrice A.
- On note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de la matrice A (vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
  Alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Exemple 2.3 : Calculer le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Théorème du rang pour les matrices : Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p$.

Proposition 2.4 (invariance du rang par produit de matrices inversibles)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.
Alors $\mathrm{Ker}(PA) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$. En particulier, $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A)$.

Conséquence : Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple 2.5 : Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.6 (invariance du rang par transposition)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a l'égalité : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Conséquence : Le rang d'une matrice A est aussi égal au rang de la famille des vecteurs correspondant aux lignes de A.

Exemple 2.7 : On considère la matrice A de l'exemple précédent. Calculer à nouveau son rang.

Proposition 2.8 (caractérisation de l'inversibilité à l'aide du noyau ou de l'image)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible ;
- $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$;
- $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exemple 2.9 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Proposition 2.10 (retour sur l'inversibilité d'une matrice triangulaire supérieure)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.
La matrice A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Lorsque c'est le cas, la matrice inverse A^{-1} est elle aussi triangulaire supérieure, et ses coefficients **diagonaux** sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

2.2 Retour sur les systèmes linéaires

Proposition 2.11 (ensemble des solutions d'un système linéaire)

Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On considère le système linéaire d'écriture matricielle (S) : $AX = B$.
Deux cas peuvent se produire :

1. Le système (S) est compatible, c'est-à-dire que (S) possède au moins une solution X_0.
   Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) est $X_0 + \mathrm{Ker}(A)$.
2. Le système (S) est incompatible, c'est-à-dire qu'il n'a pas de solution.

Remarques :

1. On dit que le système homogène (S_H) : $AX = 0$ est de rang $\mathrm{rg}(A)$.
   L'ensemble des solutions de (S_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.
2. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.

Exemple 2.12 : Résoudre le système d'inconnues réelles $\begin{cases} x_1 + x_3 + 5x_4 & = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 & = -18 \end{cases}$.

2.3 Lien entre les diverses notions de rang

Proposition 2.13 (lien avec le rang d'une famille)

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille (non vide) d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Alors $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_p))$.

Conséquence : La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_p)) = n$.

Exemple 2.14 : Montrer que $(X^2+X+1, X^2+2X+3, X^2+4X+5)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 2.15 (Lien avec le rang d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$.

Conséquence : L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)) = n$.

Exemple 2.16 : Soit f l'application linéaire suivante $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X] \\ P \mapsto P(X^2+1) \end{cases}$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

3 Changements de bases

3.1 Matrices de passage

Définition 3.1 (matrice de passage entre deux bases)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle <u>matrice de passsage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$</u>, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$$

Il s'agit d'une matrice carrée, de taille $\dim(E)$.

Remarque : Avec les mêmes notations, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Exemple 3.2 : Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Proposition 3.3 (inversibilité et inverse d'une matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$: $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

Exemple 3.4 : Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

3.2 Changements de bases et vecteurs

Théorème 3.5 (effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit v un vecteur de E.
On a la relation : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$.

Exemple 3.6 : Déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{B}' = (1,X-1,(X-1)^2)$.

Conséquence : Avec les mêmes notations, si $(v_1, \cdots, v_p)$ est une famille de vecteurs de E, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \cdots, v_p) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v_1, \cdots, v_p)}$$

3.3 Changements de bases et applications linéaires

Théorème 3.7 (effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F, et soit une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On a la relation :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

Théorème 3.8 (effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$. On a la relation :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Méthode : *Diagonalisation. Afin de déterminer les itérés d'un endomorphisme f, il faut calculer les puissances de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique (ce qui n'est pas toujours facile). Néanmoins, si on nous donne une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est diagonale, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)^n$ se calcule aisément, ce qui permet de déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)$ via la formule suivante $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)^n(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1}$.*

Exemple 3.9 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant $f : (x,y) \mapsto (-4x+2y,3x+y)$.
Déterminer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pourra considérer les deux vecteurs suivants : $e'_1 = e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = -2e_1 + e_2$ qui forment une base de $\mathbb{R}^2$ que l'on notera $\mathscr{B}'$.

3.4 Matrices semblables

Définition 3.10 (matrices semblables)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient A et $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que les matrices A et A' sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque : En particulier, les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables.

Méthode : *Il n'est pas toujours facile de déterminer les puissances d'une matrice carré A. Néanmoins, si on nous donne une matrice diagonale A' semblable à A i.e. $A' = P^{-1}AP$ où P est une matrice inversible, alors les puissances de A peuvent se calculer via l'égalité suivante : $A^n = PA'^nP^{-1}$.*

Exemple 3.11 : Soit $B = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra montrer que B est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en introduisant $P = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.